Eşantionarea. Reconstituirea semnalului eşantionat

1. Introducere

În această lucrare se studiază principalele aspecte privind eşantionarea semnalelor şi, pe baza acestora, modalităţi de reconstituire a semnalelor unidimensionale.

2. Principiul eşantionării

Utilizarea metodelor numerice, folosind calculatorul, pentru prelucrarea semnalelor analogice necesită discretizarea lor în timp, ceea ce se realizează prin operaţia de eşantionare dar şi discretizarea în valoare, ceea ce se realizează prin operaţia de cuantizare.

Prin eşantionarea unui semnal analogic s(t) cu pasul (perioada) de eşantionare constant T_e, (figura 3.1), rezultă secvenţa:

$$s(k)=s(kT_e),\ -\infty<k<\infty. \tag{3.1}$$

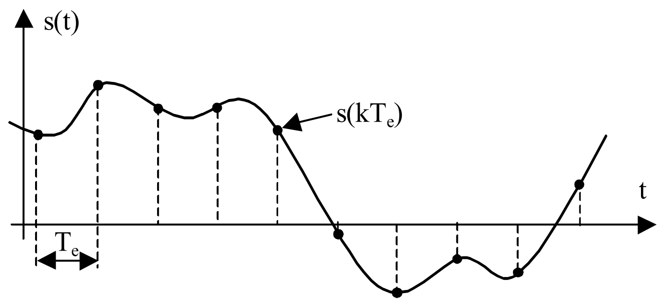

Figura 3.1

În mod corespunzător $1/T_e$, va semnifica frecvenţa sau rata de eşantionare. Înlocuirea semnalului cu eşantioanele sale se poate face doar dacă cu ajutorul acestora se poate reconstitui semnalul iniţial. Secvenţa dată de relaţia 3.1, constituie o reprezentare unică a semnalului analogic original dacă sunt respectate condiţiile impuse de teorema WKS (Whittaker, Kotelnikov, Shannon).

Un semnal analogic s(t) care are f_{max}, cea mai mare frecvenţă din spectru, este perfect determinat dacă se cunosc eşantioanele distanţate cu:

$$T_e=\frac{1}{2f_{max}}, \tag{3.2}$$

iar $$s(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}s(k)\cdot\frac{\sin 2\pi f_{max}(t-kT_e)}{2\pi f_{max}(t-kT_e)}, \tag{3.3}$$

unde $s(kT_e)$ sunt valorile eşantioanelor, iar funcţia eşantion este definită de:

$$sin_c = \frac{sin\, 2\pi f_{max}(t - kT_e)}{2\pi f_{max}(t - kT_e)}. \quad (3.4)$$

Reprezentarea este valabilă numai pentru funcţii de bandă limitată şi eşantioanele suficient de dese încât să fie evitate erorile de aliere. Erorile de aliere apar dacă în domeniul de frecvenţă corespunzător semnalului analogic de la intrarea sistemului de achiziţie de date există componente sinusoidale diferite dar cu aceiaşi reprezentare numerică, adică cu aceleaşi eşantioane. De aceea, practic trebuie limitat superior spectrul semnalului analogic de intrare cu un filtru trece jos, în corelaţie cu frecvenţa de eşantionare. Cu alte cuvinte, ceva mai mult decât două eşantioane într-o perioadă ar fi suficiente pentru reconstituirea unui semnal sinusoidal, adică frecvenţa de eşantionare trebuie să fie mai mare decât frecvenţa Nyquist. Frecvenţa Nyquist este egală cu dublul frecvenţei maxime conţinute în spectrul semnalului.

Teorema WKS enunţată mai sus este aplicabilă nu numai semnalelor aperiodice dar şi semnalelor periodice, presupuse teoretic de durată infinită. În anumite situaţii, dacă funcţia prelevată reprezintă exact o perioadă a semnalului original, atunci reconstituirea ei pe baza teoremei WKS ca semnal de durată limitată va suporta întotdeauna erori, oricât de mare ar fi frecvenţa de eşantionare. Pentru eliminarea unor astfel de situaţii la reconstituirea unui semnal periodic se vor utiliza N eşantioane prelevate uniform pe durata a P perioade, astfel încât eşantioanele oricărei perioade din cele P avute în vedere nu constituie o repetare a eşantioanelor din celelalte P-1 perioade considerate. Astfel, informaţia despre semnal este dată de eşantioanele din toate cele P perioade şi nu de eşantioanele extrase dintr-o singură perioadă.

3. Reconstituirea semnalului

Prin reconstituirea unui semnal analogic s(t) se înţelege în general determinarea funcţiei s(t), pe baza eşantioanelor $s(kT_e)$ prelevate în domeniul timp, sau pe baza eşantioanelor corespunzătoare, dacă acestea sunt cunoscute în domeniul frecvenţă ca fiind rezultate în urma unui proces de prelucrări de semnale.

Dependent de natura aplicaţiei, reconstituirea se poate realiza fie cu ajutorul unor circuite electronice specifice numite extrapolatoare, fie prin calcul numeric.

Având în vedere că în cazul prelucrărilor numerice se operează cu secvenţe de numere, procesul de reconstituire în această accepţiune va reprezenta determinarea secvenţei semnalului reconstituit pe baza unor informaţii primare reprezentate prin secvenţe în domeniul timp, respectiv domeniul frecvenţă. Este evident că secvenţa reconstituită va conţine un număr sporit de componente faţă de secvenţele primare, în funcţie de precizia impusă în reprezentarea semnalului s(t). În domeniul timp acest proces de îndesire a eşantioanelor în scopul obţinerii semnalului reconstituit se numeşte interpolare. Alături de criteriul obţinerii unei precizii cât mai bune a semnalului reconstituit față de semnalul original, interpolarea trebuie să se realizeze într-un timp de calcul cât mai scurt.

În principiu calculul numeric al componentelor lipsă se poate efectua utilizând expresia (3.3), însă reconstituirea prin această metodă are nevoie de un număr infinit de termeni. Această soluție este neconvenabilă din punct de vedere practic deoarece conduce la o durată relativ mare de calcul. Dacă se operează cu un număr finit de eşantioane, adică se prelucrează un semnal de durată limitată, reconstituirea fără erori a funcției originale teoretic este imposibilă. De aceea, apare firească înlocuirea procesului de filtrare ideală reprezentat de relația (3.3), printr-o filtrare care doar aproximează funcția de transfer a filtrului ideal. Metodele de interpolare clasice folosesc funcții de interpolare care au proprietatea fundamentală, ca şi funcția din relația (3.3), că în punctele de eşantionare ele coincid cu valorile eşantioanelor. În aceste puncte procesul de reconstituire nu comportă erori indiferent de frecvența de eşantionare.

Numim semnal de interpolare semnalul ŝ(t) cu proprietatea:

$\hat{s}(kT_e)=s(kT_e)$ pentru $k\in\mathbf{N}$. (3.5)

Cele mai simple metode de interpolare pornesc de la dezvoltarea în serie a semnalului s(t):

$$s(t)=s(kT_e)+\frac{1}{1!}s'(kT_e)(t-kT_e)+\frac{1}{2!}s''(kT_e)(t-kT_e)^2+\ldots+ \qquad (3.6)$$

cu $k\in\mathbf{N}$, iar s(t), $s'(t)$, $s''(t)$ fiind valorile semnalului respectiv ale derivatelor sale de ordin 1, 2,…, în punctele kT_e.

Reținând doar primul termen obținem interpolarea de ordin 0 sau interpolarea cu reținere:

$\hat{s}(t)=s(kT_e)$ pentru $kT_e< t)< (k+1)T_e)$. (3.7)

În acest caz semnalul reconstituit este format din trepte, valoarea unui eşantion fiind reținută până la eşantionul următor (figura 3.2).

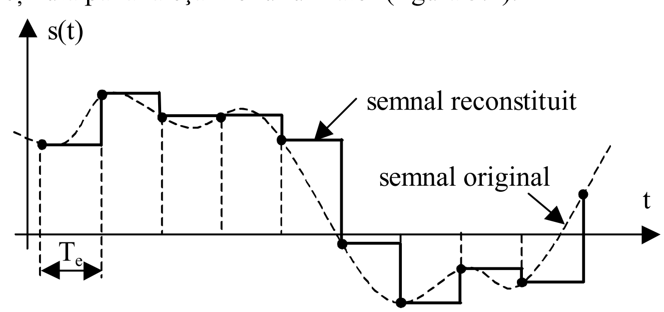

Figura 3.2

Reținând primii doi termeni din expresia (3.6) se obține interpolarea de ordinul 1:

$$\hat{s}(t)= s(kT_e)+\frac{1}{1!}s'(kT_e)(t-kT_e)\ ) \text{ pentru } kT_e< t)< (k+1)T_e), \tag{3.8}$$

cu observaţia că valoarea primei derivate în momentul de eşantionare kT_e, se aproximează în funcţie de valorile eşantioanelor $s(kT_e)$ şi $s((k+1)T_e)$:

$$s'(kT_e)=\frac{s((k+1)T_e)-s(kT_e)}{T_e} \tag{3.9}$$

În figura 3.3 se reprezintă un exemplu pentru reconstituirea semnalului prin interpolare de ordinul 1.

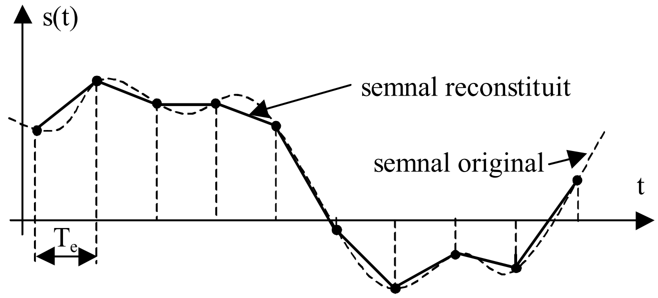

Figura 3.3

Datorită faptului că $s'(t)$ utilizează eşantionul curent $s(kT_e)$ şi eşantionul următor $s((k+1)T_e)$ rezultă o întârziere cu un T_e, a refacerii semnalului. Dacă $s'(t)$ se exprimă în funcţie de eşantionul actual şi de eşantionul anterior, atunci reconstrucţia se face fără întârziere, realizându-se o extrapolare.

Pentru a se obţine prin interpolare semnale mai apropiate de semnalul iniţial se folosesc interpolări de ordin superior (interpolarea Lagrange, interpolarea spline).

Eşantionarea în timp real, descrisă mai sus, permite achiziţia şi reconstituirea atât a semnalelor periodice cât şi a fenomenelor singulare, aşa cum s-a văzut, în condiţiile în care se prelevează un număr suficient de eşantioane şi se foloseşte o tehnică adecvată de interpolare, cele două probleme fiind strâns legate.

În practică, în cazul osciloscoapelor numerice (instrumente virtuale), este necesară eşantionarea cu o frecvenţă mai mare decât frecvenţa Nyquist pentru obţinerea unei reproduceri acceptabile a semnalului original, chiar dacă se folosesc tehnici speciale de interpolare, deoarece semnalul reconstituit este puternic dependent de relaţia de fază, evident necunoscută, dintre semnalul util şi pasul de eşantionare (figura 3.4).

Dacă se eşantionează cu o frecvenţă de 10 ori mai mare decât frecvenţa maximă din spectrul semnalului, chiar şi interpolarea liniară conduce la erori sub 5%, considerate acceptabile. Din acest motiv regula nescrisă de a preleva 10 eşantioane pe o perioadă a devenit un fel de standard în cazul osciloscoapelor numerice.

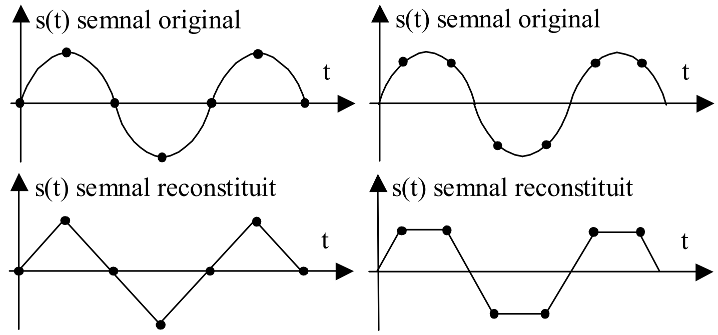

Figura 3.4

În cazul osciloscoapelor numerice se pot utiliza şi tehnicile de eşantionare secvenţială (figura 3.5) şi eşantionare aleatorie (figura 3.6).

Aceste metode reprezintă o eşantionare în timp echivalent deoarece redarea semnalului se face la o altă scară a timpului decât achiziţia, permiţând obţinerea unei rezoluţii temporale foarte bune datorită faptului că pasul de eşantionare poate fi extrem de mic.

Eşantionarea aleatorie este potrivită pentru vizualizarea fronturilor, datorită faptului că eşantionarea apare aleator în raport cu tactul osciloscopului. Eşantionarea secvenţială este adecvată numai în cazul semnalelor periodice.

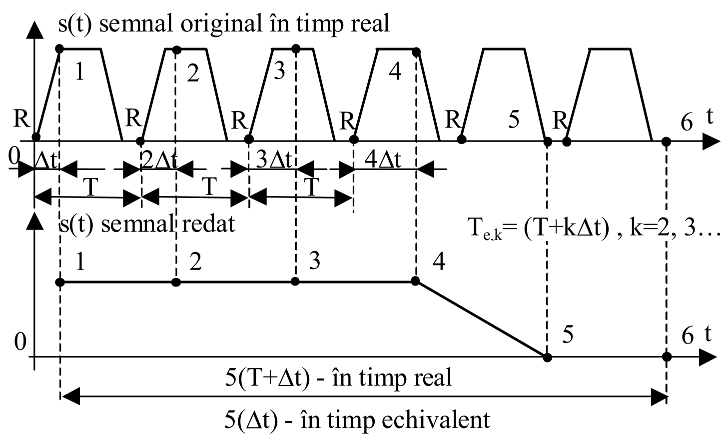

Figura 3.5

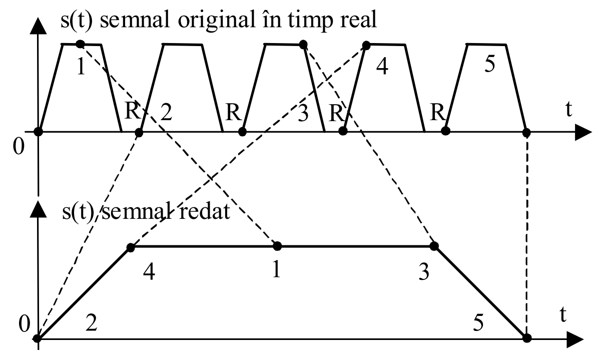

Figura 3.6

4. Desfăşurarea lucrării

Semnalul ce urmează a fi prelucrat este:

s(t)=5sin (0,05t)+ 15sin (0,4t)+ 10sin (0,1t) (3.10)

4.1 Se reprezintă semnalul s(t) pe perioada $t\in(0,196)$, utilizând funcţiile adecvate din mediul de programare MATLAB.

4.2 Se alege pasul de eşantionare T_e, cu valoarea egală, mai mare şi mai mică decât valoarea care rezultă din relaţia (3.2).

3.3 Se eşantionează semnalul s(t) cu paşii de eşantionare determinaţi anterior.

4.4 Se vor determina semnalele reconstituite din secvenţele de eşantioane determinate pentru semnalul s(t), utilizând funcţiile de interpolare din mediul de programare MATLAB.

4.5 Se vor determina şi vizualiza erorile absolute care rezultă între semnalele reconstituite şi semnalul original.